پاسخنامه تشریحی فصل دوازدهم

آزمون جامع ۱

۱. گزینه‌ی «۲»

$$\log(3x+1)+2\log\sqrt{x-2}=\frac{1}{2}\log(x^2-2x+1)+\log(x+2)$$

$$\Rightarrow \log(3x+1)+\log(\sqrt{x-2})^2=\log\left\{(x-1)^2\right\}^{\frac{1}{2}}+\log(x+2)$$

$$\Rightarrow \log(3x+1)+\log(x-2)=\log(x-1)+\log(x+2)$$

$$\Rightarrow \log(3x+1)(x-2)=\log(x-1)(x+2)$$

$$\Rightarrow (3x+1)(x-2)=(x-1)(x+2)$$

$$\Rightarrow 3x^2-6x+x-2=x^2+2x-x-2$$

$$\Rightarrow 2x^2-6x=0\Rightarrow 2x(x-3)=0\Rightarrow x=0, x=3$$

به ازای $x=0$، $\sqrt{x-2}$ تعریف نشده بوده و فقط $x=3$ قابل قبول است.

۲. گزینه‌ی «۱»

$$f(t)=300e^{0/2t}\xrightarrow{f(t)=1500}1500=300e^{0/2t}\Rightarrow 5=e^{0/2t}$$

$$\Rightarrow \text{Ln}5=\text{Ln}(e^{0/2t})\Rightarrow 1/6=0/2t\underbrace{\text{Lne}}_{1}\Rightarrow 1/6=0/2t$$

$$\Rightarrow t=\frac{1/6}{0/2}=8$$

۳. گزینه‌ی «۱»

$$42=2\times3\times7\Rightarrow \log_{42}^{42}=\log_{42}^{(2\times3\times7)}$$

$$\Rightarrow 1=\log_{42}^{2}+\log_{42}^{3}+\log_{42}^{7}\Rightarrow 1=\log_{42}^{2}+b+a$$

$$\Rightarrow \log_{42}^{2}=1-b-a\ (*)$$

$$\Rightarrow \log_{42}^{4}=\log_{42}^{2^2}=2\log_{42}^{2}=2(1-b-a)=-2(a+b-1)$$

۴. گزینه‌ی «۲»

بهترین روش برای حل روش عددگذاری است:

$$f(x)=2^{-x}+2^{-x+1}+1\Rightarrow f(0)=2^0+2^1+1=4\Rightarrow f(0)=4$$

پس نمودار تابع باید محور yها را در (۴) قطع کند، پس گزینه‌ی «۱» غلط است. هم‌چنین تابع نمایی همواره مثبت است، پس $f(x)>0$ است، لذا گزینه‌ی «۳» هم اشتباه است، از طرفی داریم: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2^{-\infty}+2^{-\infty}+1=0+0+1=1$

پس گزینه‌ی «۴» هم اشتباه است.

۵. گزینه‌ی «۴»

$$\log_3^x+\log_{2^3}^{2^3}=\log_x^3\Rightarrow \log_3^x+\frac{3}{2}\log_2^2=\log_x^3\ (*)$$

از طرفی می‌دانیم که $\log_b^a=\frac{1}{\log_a^b}$، پس معادله‌ی (*) به فرم زیر ساده می‌شود:

$$\log_3^x+\frac{3}{2}=\frac{1}{\log_3^x}\xrightarrow{\log_3^x=t}t+\frac{3}{2}=\frac{1}{t}$$

$$\xrightarrow{\times 2t}2t^2+3t=2\Rightarrow 2t^2+3t-2=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{-3\pm\sqrt{9-4(2)(-2)}}{2\times2}$$

$$\Rightarrow t=\frac{-3\pm5}{4}\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{1}{2}\\ t=-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\log_3^x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\\ \log_3^x=-2\Rightarrow x=3^{-2}=\frac{1}{9}\end{cases}$$

۶. گزینه‌ی «۱»

یادآوری: $a^{\log_a^b}=b$

$$\log_2^x-2^{1+\log_2^3}=0\Rightarrow \log_2^x=2^1\times2^{\log_2^3}$$

$$\Rightarrow \log_2^x=2\times3=6\Rightarrow x=2^6=64$$

۷. گزینه‌ی «۲»

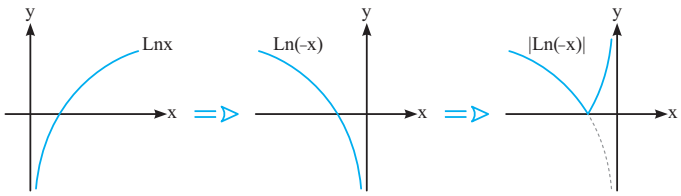
$$\log_2(4x+2)-2\log_2\sqrt{x+4}=1$$

$$\Rightarrow \log_2(4x+2)-\log_2(\sqrt{x+4})^2=1$$

$$\Rightarrow \log_2(4x+2)-\log_2(x+4)=1\Rightarrow \log_2\frac{4x+2}{x+4}=1$$

$$\Rightarrow \frac{4x+2}{x+4}=2^1\Rightarrow 4x+2=2x+8\Rightarrow 2x=6\Rightarrow x=3$$

۸. گزینه‌ی «۲»



۹. گزینه‌ی «۴»

$$\log 6000=\log(3\times2\times10^3)=\log3+\log2+\log10^3$$

$$\Rightarrow \log 6000=0/477+0/301+3\underbrace{\log10}_{1}=3/778$$

۱۰. گزینه‌ی «۴»

$$f(t)=100-60e^{-0/2t}=70\Rightarrow 100-70=60e^{-0/2t}$$

$$\xrightarrow{\div60}\frac{1}{2}=e^{-0/2t}\Rightarrow \text{Ln}(\frac{1}{2})=\text{Ln}(e^{-0/2t})$$

$$\Rightarrow \underbrace{\text{Ln}1}_{0}-\text{Ln}2=-0/2t\underbrace{\text{Lne}}_{1}\Rightarrow -\text{Ln}2=-0/2t$$

$$\Rightarrow t=\frac{\text{Ln}2}{0/2}\Rightarrow t=5\text{Ln}2=\text{Ln}2^5=\text{Ln}32$$

آزمون جامع ۲

۱. گزینه‌ی «۴»

ابتدا معادله‌ی تلاقی دو تابع را تشکیل می‌دهیم و سپس نقاط $-\frac{1}{2}$ و ۳ را در آن جایگزین می‌کنیم.

$$y_1=y_2\Rightarrow \log_2(x+1)=ax+b\ (*)$$

$$\begin{cases} \xrightarrow{(*)\ \text{در}\ x=3} \log_2(3+1)=3a+b \Rightarrow \log_2^{2^2}=3a+b \\ \xrightarrow{(*)\ \text{در}\ x=\frac{-1}{2}} \log_2(\frac{-1}{2}+1)=\frac{-1}{2}a+b \Rightarrow \log_2^{2^{-1}}=\frac{-1}{2}a+b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2=3a+b \\ -1=\frac{-1}{2}a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+\cancel{b}=2 \\ \frac{1}{2}a-\cancel{b}=1 \end{cases} \Rightarrow 3a+\frac{1}{2}a=3$$

$$\Rightarrow \frac{7}{2}a=3 \Rightarrow 7a=6$$

۲. گزینه‌ی «۴»

در تابع نمایی صعودی پایه‌ی توان بزرگ‌تر از ۱ است، پس:

$$2a-a^2>1 \Rightarrow a^2-2a+1<0 \Rightarrow (a-1)^2<0 \rightarrow \text{غ‌ق‌ق}$$

پس مقداری برای a وجود ندارد.

۳. گزینه‌ی «۲»

$$\log_{12}^3=a \Rightarrow \log_3^{12}=\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \log_3(2^2\times 3)=\frac{1}{a} \Rightarrow 2\log_3^2+\log_3^3=\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow 2\log_3^2+1=\frac{1}{a} \Rightarrow 2\log_3^2=\frac{1}{a}-1 \Rightarrow 2\log_3^2=\frac{1-a}{a}$$

$$\Rightarrow \log_3^2=\frac{1-a}{2a}(*)$$

$$\Rightarrow \log_3^8=\log_3^{2^3}=3\log_3^2 \overset{(*)}{=} 3(\frac{1-a}{2a})=\frac{3(1-a)}{2a}=\frac{3}{2}(\frac{1}{a}-1)$$

۴. گزینه‌ی «۴»

$$\log_{\sqrt{6}}\sqrt{3^x+2^x-7}=x(1-\log_6^3)$$

$$\Rightarrow \log_{6^{\frac{1}{2}}}(3^x+2^x-7)^{\frac{1}{2}}=x(1-\log_6^3)$$

$$\Rightarrow \log_6(3^x+2^x-7)=x-x\log_6^3=x\log_6^6-x\log_6^3$$

$$\Rightarrow \log_6(3^x+2^x-7)=\log_6^{6^x}-\log_6^{3^x}=\log_6(\frac{6^x}{3^x})=\log_6^{2^x}$$

$$\Rightarrow 3^x+2^x-7=2^x \Rightarrow 3^x=7 \Rightarrow \log_3^{3^x}=\log_3^7 \Rightarrow x=\log_3^7$$

۵. گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم که $\cos 75^\circ=\sin 15^\circ$ است، چون این دو زاویه متمم یکدیگرند، از طرفی می‌دانیم که $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ است، پس:

$$\log_2(\cos 15^\circ\cos 75^\circ)=\log_2(\cos 15^\circ\sin 15^\circ)$$

$$=\log_2\frac{1}{2}\sin(2\times 15^\circ)=\log_2\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\log_2(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})$$

$$=\log_2 2^{-2}=-2$$

۶. گزینه‌ی «۲» اصلاحیه: به اشتباه در پاسخ نامهٔ کلیدی گزینهٔ «۳» خورده.

$$f(t)=1200+8000e^{-\frac{t}{4}}=2000$$

$$\Rightarrow 800=8000e^{-\frac{t}{4}} \xrightarrow{\div 8000} \frac{1}{10}=e^{-\frac{t}{4}}$$

$$\Rightarrow \text{Ln}(\frac{1}{10})=\text{Ln}(e^{-\frac{t}{4}}) \Rightarrow -2/3=-\frac{t}{4} \Rightarrow t=9/2$$

۷. گزینه‌ی «۱»

$$\log_{10}(\frac{x+3}{5})+1<0 \Rightarrow \log\frac{x+3}{5}<-1$$

در نامعادلات لگاریتمی می‌دانیم که اگر پایه‌ی لگاریتم بزرگ‌تر از واحد باشد، پس از ساده‌سازی جهت حفظ می‌شود، لذا داریم:

$$\log(\frac{x+3}{5})<-1 \Rightarrow \frac{x+3}{5}<10^{-1} \Rightarrow \frac{x+3}{5}<\frac{1}{10} \Rightarrow x+3<\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x<\frac{1}{2}-3 \Rightarrow x<-\frac{5}{2} \qquad (1)$$

از طرفی با توجه به دامنه‌ی توابع لگاریتمی داریم:

$$\frac{x+3}{5}>0 \Rightarrow x>-3 \qquad (2) \xrightarrow{(1)\cap(2)} -3<x<-\frac{5}{2}$$

۸. گزینه‌ی «۴»

$$\log(2^x+8)=\log 2+\log 2^x \Rightarrow \log(2^x+8)=\log(2\times 2^x)$$

$$\Rightarrow 2^x+8=2\times 2^x \Rightarrow 8=2^x \Rightarrow x=3$$

$$\Rightarrow \frac{\log_x^3+3}{\log_3^x+1}=\frac{\log_3^3+3}{\log_3^3+1}=\frac{1+3}{1+1}=2$$

۹. گزینه‌ی «۲»

$$\text{Ln}(x+1)-\text{Ln}(2x-1)=2 \Rightarrow \text{Ln}(\frac{x+1}{2x-1})=2$$

$$\xrightarrow{\text{Lnx}=\log_e^x} \frac{x+1}{2x-1}=e^2$$

$$\Rightarrow x+1=2e^2x-e^2 \Rightarrow e^2+1=2e^2x-x$$

$$\Rightarrow e^2+1=x(2e^2-1) \Rightarrow x=\frac{e^2+1}{2e^2-1}$$

۱۰. گزینه‌ی «۱»

کافی است نمودار Lnx را رسم نموده و سپس ۲ واحد آن را به سمت راست منتقل کنیم که جواب گزینه‌ی «۱» می‌شود.